CALCULER NUMERIQUEMENT ET ALGEBRIQUEMENT

1. Calcul littéral

1.1 Compléter les égalités données.

$a. x^2 + 10x + 25$ $\quad$ $b. (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$c. (2x-3)^3$ $\quad$ $d. (x+3)(x-3)$

1.2 Compléter les égalités données.

$a. x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ $\quad$ $b. \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = x^2 + 7x + \frac{49}{4}$

$c. (x+2)^2 + 1$ $\quad$ $d. (x+2)(x-4)$

1.3 Factoriser chacune des expressions suivantes.

$A = x(6x-5)$ $\quad$ $B = x(x^2 - 5x + 7)$

$C = (x-6)(x+6)$ $\quad$ $D = (3x-5)(3x+5)$

$E = 9(x-2)$ $\quad$ $F = (-2x-1)(-2x+3)$

$G = (x-9)(x+5)$ $\quad$ $H = \left(\sqrt{7} - x - 1\right)\left(\sqrt{7} + x + 1\right)$

$I = (4x-3)^2$ $\quad$ $J = (2x+8)(4x-6)$

2. Calculer avec des racines carrées

2.1 Simplifier au maximum l'écriture des nombres :

$A = 13$ $\quad$ $B = 30$ $\quad$ $C = 18$ $\quad$ $D = 10^3$

2.2 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ sous forme de fractions irréductibles :

$E = 2\sqrt{3}$ $\quad$ $F = 6\sqrt{2}$ $\quad$ $G = 2\sqrt{11}$ $\quad$ $H = \frac{2}{7}\sqrt{3}$

2.3 Simplifier les écritures fractionnaires suivantes :

$I = -1$ $\quad$ $J = 2 - \sqrt{3}$ $\quad$ $K = 1 + \sqrt{3}$

RESOUDRE DES EQUATIONS ET DES INEQUATIONS

1. Résoudre des équations

1.1 Résoudre chacune des équations suivantes en commençant par indiquer quel est son type (n°1 : premier degré, n°2 : équation produit nul, n°3 : équation carré isolé, n°4 : équation quotient).

a. $S = \left\{-\frac{3}{2} ; 5\right\}$ (2)

b. $S = \{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$ (3)

c. $S = \{6\}$ (1)

d. $S = \emptyset$ (3)

e. $S = \left\{\frac{4}{5} ; \frac{9}{2}\right\}$ (2)

f. $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ (4)

g. $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ (1)

h. $S = \{2; 2\}$ (4)

2. Résoudre des inéquations

2.1 Compléter les tableaux de signes suivants

x	$-\infty$ 5 $+\infty$
$x-5$	- 0 +

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$-2x+6$	+ 0 -

x	$-\infty$ -1 7 $+\infty$
$x+1$	- 0 + +
$-x+7$	+ + 0 -
$(x+1)(-x+7)$	- 0 + 0 -

2.2 Résoudre dans R les inéquations suivantes, en s'appuyant sur un tableau de signes.

(a) $(x + 2)(x - 8) > 0$

(b) $(2x - 3)(x + 4) \leq 0$

x	$-\infty$ -2 8 $+\infty$
$x+2$	- 0 + +
$x-8$	- - 0 +
$(x+2)(x-8)$	+ 0 - 0 +

x	$-\infty$ -4 3/2 $+\infty$
$2x-3$	- - 0 +
$x+4$	- 0 + +
$(2x-3)(x+4)$	+ 0 - 0 +

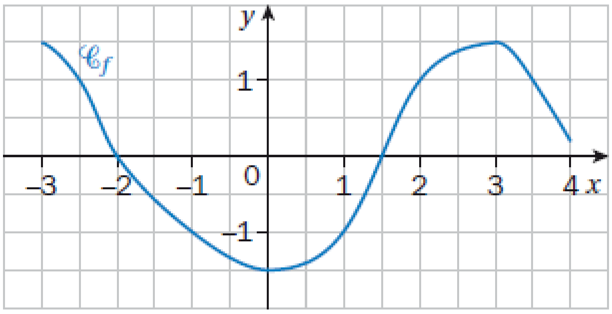
$(x + 2)(x - 8) > 0$ pour $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

$(2x - 3)(x + 4) \leq 0$ pour $x \in \left[-4 ; \frac{3}{2}\right]$.

3. Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

On considère la fonction f dont la courbe représentative Cf est donnée ci-dessous.
1. Donner graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre graphiquement :

a. $f(x) = 0$ $\quad S = \{-2; 1{,}5\}$
b. $f(x) > 0$ $\quad x \in [-3; -2[\cup]1{,}5; 4]$
c. $f(x) \geq -1$ $\quad x \in [-3; -1] \cup [1; 4]$
d. $f(x) = -1$ $\quad S = \{-1; 1\}$
e. $f(x) < 1$ $\quad x \in]-2{,}5; 2[\cup]3{,}5; 4]$
f. $f(x) \geq -2$ $\quad x \in \mathbb{R}$
g. $f(x) > 1{,}5$ $\quad S = \emptyset$
h. $f(x) \geq 1{,}5$ $\quad S = \{-3; 3\}$

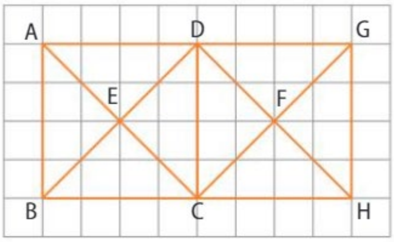


VECTEURS ET DROITES

1. Utiliser le calcul vectoriel

1.1 On considère deux carrés ABCD et DCHG de centre E et F.

a. $\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{EC}; \overrightarrow{FH}$
b. $\overrightarrow{BC}$
c. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BG}$

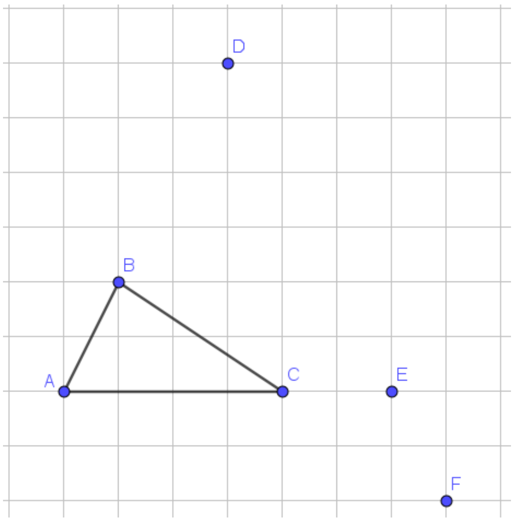


1.2 a. Reproduire le triangle ABC ci-contre et placer les points D, E et F tels que :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$



b. Montrer que $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{DE} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

c. Montrer que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

d. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour les points D, E et F ?
On a $\overrightarrow{DE} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On remarque que $\overrightarrow{DE} = -3\overrightarrow{FE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires donc les points D, E et F sont alignés.

1.3 Utiliser la relation de Chasles

1. Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.

a. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ b. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ c. $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{w} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{w} = 2\overrightarrow{BA}$

2. Démontrer que pour tous points O, A, B et C on a

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

2. Calculer dans un repère du plan

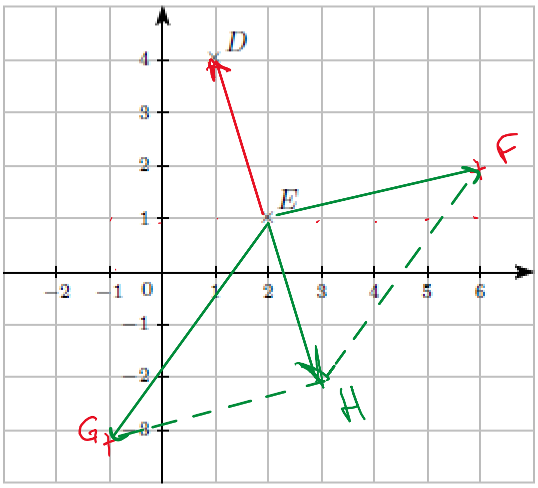
2.1 Dans un le repère (O; I ; J) ci-contre, on considère les points $E(2 ; 1)$ et $D(1 ; 4)$.

1. a. Placer le point F tel que $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

b. Placer point G tel que $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

c. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$. $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

2. On considère le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$.
a. Placer le point H.
b. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EH}$. $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$



2.2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A(-2 ; 0), B(1 ; 1) et C(0 ; 4).

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

b. Quel est la nature du triangle ABC ?
$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ $BC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
$AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2$ et AB = BC
ABC est rectangle isocèle.

c. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3-1\\-1+3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D-1\\y_D-1\end{pmatrix}$ donc $D(-3;3)$
$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0+3\\4-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2.3 Utilisation du déterminant

1) Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et justifier.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-4\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$

a) $det(\vec{u},\vec{v}) = -11$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
b) $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
c) $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

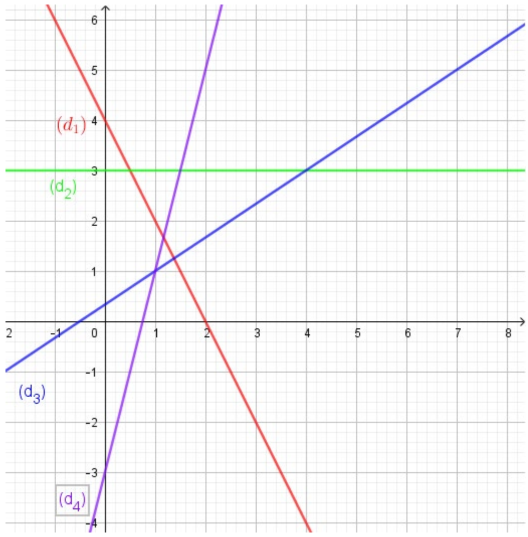
2) Soit x un réel et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$. Sofia a trouvé un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. A-t-elle raison ? Si oui, quel est ce réel ?

$$det(\vec{u},\vec{v}) = 2 \times 2x - 3(1+x)$$
$$det(\vec{u},\vec{v}) = x - 3$$
$$det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

3. Equations cartésiennes de droites

3.1 Vecteurs directeurs :

On se place dans un repère orthonormé du plan. Déterminer par lecture graphique les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites représentées ci-contre.



$d_1 : \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $d_2 : \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $d_3 : \vec{w}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $d_4 : \vec{k}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

3.2 Vecteurs directeurs bis :

On se place dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites dont une équation est donnée ci-dessous :

$d_1 : -x + 2y + 1 = 0$ $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $d_2 : 2x - 4y + 3 = 0$ $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$d_3 : 2x + y - 1 = 0$ $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $d_4 : -4x + 8y + 3 = 0$ $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses en justifiant.

a. d_1 et d_2 sont parallèles b. d_2 et d_4 sont confondues c. d_1 et d_3 sont sécantes

a. $\vec{u}_2 = -2\overrightarrow{u_1}$ vrai b. $\vec{u}_4 = -2\overrightarrow{u_2}$ mais $c_4 \neq -2c_2$ faux c. $\vec{u}_3 \neq k\overrightarrow{u_1}$ vrai.

3.3 Equations de droites

A(–3 ; 6), B(1 ; –2) et C(2 ; –4) sont des points du plan muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

$$(AB) : 2x + y = 0$$

2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

$2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ donc C appartient à (AB).

3. (*d*) est la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$.

a. Démontrer que la droite (*d*) est sécante à (AB). On pourra montrer que ces droites ne sont pas parallèles.$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ dirige (d) . det($\vec{u}$; $\vec{v}$)=-3+8=5 donc (d) et (AB) sont sécantes.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (*d*) et (AB).

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x + 4(-2x) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -5x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{5} \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad I\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

3.4 Droites parallèles

Trouver une équation de la droite d qui passe par A et qui est parallèle à la droite Δ :

1. A(0 ; -1) et $\Delta : y = x + 3$ $d : y = x - 1$ 2. A(1 ; 2) et $\Delta : 2x + 3y - 7 = 0$ $d : 2x + 3y - 8 = 0$

3.5 Résolution de systèmes

Résoudre chaque système linéaire d'équations, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu :

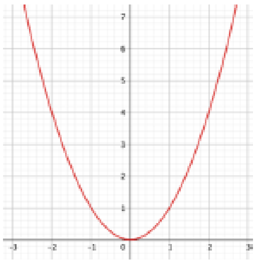
$a.\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = -3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 5 \\ 0 = 7x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ $S = \{(1; -1)\}$

$b.\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 8y = -10 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -6y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ $S = \left\{\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)\right\}$

$c.\begin{cases} x - \dfrac{1}{3}y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ $1 \times 1 = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ le système n'a pas de solution.

FONCTIONS DE REFERENCE

La fonction « carré » $x \mapsto x^2$



Elle est définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

Sa courbe est une parabole.

C'est une fonction paire.

Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

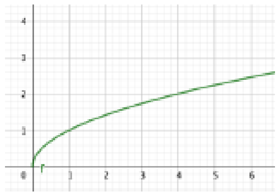
Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

La fonction « racine carrée » $x \mapsto \sqrt{x}$

Elle est définie sur

l'intervalle $[0 ; +\infty[$.



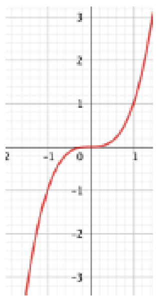
Elle est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	

Tableau de signe :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	

La fonction « cube » $x \mapsto x^3$



Elle est définie sur $]-\infty ; +\infty[$

C'est une fonction impaire.

Variations :

Elle est croissante sur $]-\infty ; +\infty[$.

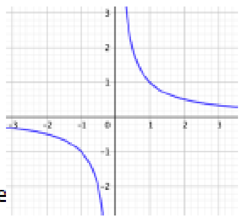
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction « inverse » $x \mapsto \frac{1}{x}$

Elle est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.



La courbe est une hyperbole.

C'est une fonction impaire.

Variations : elle est décroissante

décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

Si $0 \leq a < b$, alors $a^2 < b^2$ et si $a < b \leq 0$, alors $a^2 > b^2$.

Pour tous a et b dans $[0 ; +\infty[$ on a $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$.

Pour tous nombres réels a et b, $a^3 < b^3$ si et seulement si $a < b$.

Pour tous nombres réels a et b de même signe : $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Exercice 1.1 : Comparaisons de nombres

1) Comparer lorsque c'est possible, sans calculatrice, et en justifiant :

a) $1{,}54^2$ et $2{,}08^2$

$1{,}54 < 2{,}08$ et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $1{,}54^2 < 2.08^2$

b) $(-0{,}96)^2$ et $(-0{,}8)^2$

$-0{,}96 < -0{,}8$ et la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc $(-0{,}96)^2 > (-0{,}8)^2$

c) $0{,}2^2$ et $(-0{,}3)^2$

$(-0{,}3)^2 = 0{,}3^2$.

$0{,}2 < 0{,}3$ et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $0{,}2^2 < (-0{,}3)^2$

2) a) À l'aide de la courbe de la fonction carré, donner un encadrement de x^2 pour tout réel x tel que $2 \leq x \leq 4$. Comment peut-on justifier ce résultat ?

$2 \leq x \leq 4$ donc $4 \leq x^2 \leq 16$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

b) En suivant la même démarche, donner un encadrement de x^2

i) pour tout réel x tel que $-3 \leq x \leq -0{,}5$

$-3 \leq x \leq -0{,}5$ donc $0{,}25 \leq x^2 \leq 9$ par décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$

ii) pour tout réel x tel que $-3 \leq x \leq 2$.

Pour $0 \leq x \leq 2$ $on\ a$ $0 \leq x^2 \leq 4$ et pour $-3 \leq x \leq 0,$ $on\ a$ $0 \leq x^2 \leq 9$ donc pour $-3 \leq x \leq 2$ on a

$0 \leq x^2 \leq 9$

Exercice 1.2 : Comparaison d'inverses et de racines carrées

1. Dire à quel ensemble appartient $\frac{1}{x}$ dans les trois cas suivants :

a. $\frac{2}{5} < x < \frac{5}{4}$ b. $-\frac{3}{4} \leq x < -\frac{1}{2}$ c. $-2 < x < 1$

a. $\frac{1}{x} \in \left]\frac{4}{5} ; \frac{5}{2}\right[$ b. $\frac{1}{x} \in]-2; -\frac{4}{3}[$ c. $\frac{1}{x} \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup]1;\ +\infty [$

2. Dans chacun des cas suivants, donner le meilleur encadrement possible de $\sqrt{x}$ en justifiant :

La fonction racine carrée est croissante sur [0 ;+∞[. Elle conserve l'ordre entre 2 nombres et leurs images.

a. $0 \leq x \leq 4$ b. $9 \leq x \leq 25$ c. $0{,}25 \leq x \leq 6{,}25$ d. $\frac{1}{100} \leq x \leq 1$

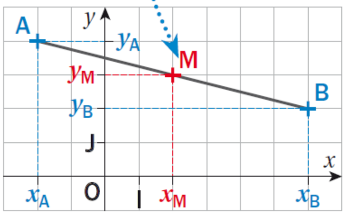
a. $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$ b. $3 \leq \sqrt{x} \leq 5$ c. $0{,}5 \leq \sqrt{x} \leq 2{,}5$ d. $\frac{1}{10} \leq \sqrt{x} \leq 1$

GEOMETRIE DANS LE PLAN

Coordonnées du milieu M d'un segment [AB]

(O, I, J) repère orthogonal.

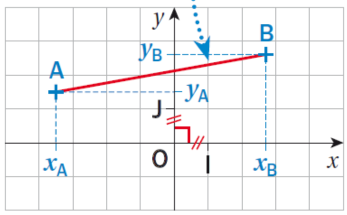
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



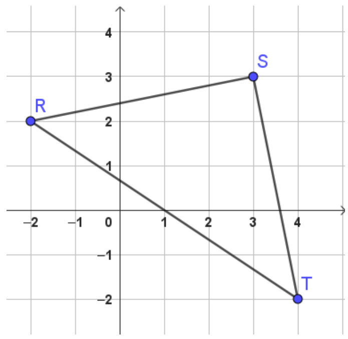
Distance entre deux points A et B

(O, I, J) repère **orthonormé.**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Exercice 2.1 : Avec des distances



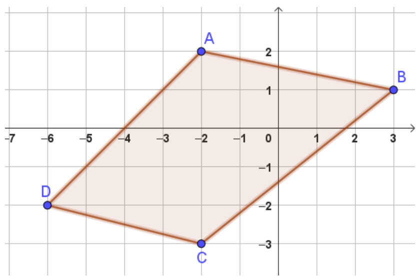
1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points R, S, T sont
R (–2 ; 2), S (3 ; 3) et T (4 ; –2).
a. Tracer la figure.
b. Le triangle RST est-il rectangle ? Détailler les calculs et justifier.

$RS^2 = (3+2)^2 + (3-2)^2 = 26$

$ST^2 = (4-3)^2 + (-2-3)^2 = 26$

$RT^2 = (4+2)^2 + (-2-2)^2 = 52$

On remarque de RT² = ST² + RS² donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, RST est rectangle en S. Il est également isocèle car RS = ST.



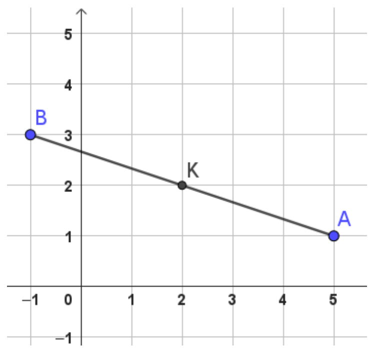
2. Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points A, B, C, D sont :
A (–2 ; 2), B (3 ; 1), C (–2 ; –3), D (–6 ; –2).
1. Tracer la figure.
2. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? Détailler les calculs et justifier (deux calculs suffisent pour répondre).

$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-2+6)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{17}$$

Les côtés opposés [AB] et [DC] du quadrilatère ABCD n'ont pas la même longueur donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

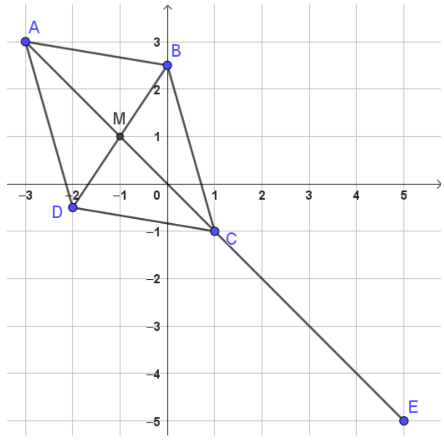
Exercice 2.2 : Milieu d'un segment



1 . Dans un repère (O, I, J) les coordonnées des points A et B sont : A (5 ; 1), B (–1 ; 3).
a. Tracer la figure.
b. Calculer les coordonnées du point K milieu du segment [AB].

$$K\left(\frac{5-1}{2} ; \frac{1+3}{2}\right) \qquad K(2; 2)$$

c. Vérifier sur la figure. cf figure.



2. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On fera une figure complète.
1. Placer les points A (-3 ; 3), B(0 ; $\frac{5}{2}$), C (1 ; -1) et D (-2 ; $-\frac{1}{2}$).
voir ci-contre

2. Démontrer que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.
milieu de [AC] $\left(\frac{-3+1}{2};\frac{3-1}{2}\right)$ milieu de [AC] $(-1;1)$
milieu de [BD] $\left(\frac{0-2}{2};\frac{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$ milieu de [BD] $(-1;1)$
[AC] et [BD] ont le même milieu $M(-1;1)$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
Les diagonales du quadrilatères ABCD ont le même milieu donc ABCD est un parallélogramme.

4. Calculer les coordonnées du symétrique E du point A par rapport au point C.
C est le milieu de [AE]
$x_C = \frac{x_A+x_E}{2} \Leftrightarrow x_E = 2x_C - x_A$; $x_E = 2\times 1 + 3 = 5$
$y = \frac{y_A+y_E}{2} \Leftrightarrow y_E = 2y_C - y_A$; $y_E = 2\times(-1) - 3 = -5$
$E(5;-5)$

<u>Exercice 2.3 : Problème de synthèse</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J)
1) On considère les points A(-2 ; 3), B(4 ; 7) et C(6 ; 4).
a. Déterminer la nature du triangle ABC et donner la valeur exacte de son périmètre et de son aire.

$$AB^2 = (4+2)^2 + (7-3)^2 = 52$$
$$AC^2 = (6+2)^2 + (4-3)^2 = 65$$
$$BC^2 = (6-4)^2 + (4-7)^2 = 13$$

On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc ABC est rectangle en B.
Périmètre $P = \sqrt{52} + \sqrt{65} + \sqrt{13} = \sqrt{65} + 3\sqrt{13}$
Aire $A = \frac{\sqrt{52}\times\sqrt{13}}{2} = 13$

b. Donner les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC.
Un triangle rectangle est inscrit dans un cercle de centre le milieu de son hypoténuse. Soit M, le milieu de $[AC]$: $M\left(\frac{-2+6}{2};\frac{3+4}{2}\right)$ $M\left(2;\frac{7}{2}\right)$

2) On donne D(3 ; 1), E(-1 ; -3) et F(2 ; -2). Démontrez que le quadrilatère ODFE est un losange.

$$OD = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$OE = \sqrt{(-1-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$DF = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$
$$FE = \sqrt{(2+1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{10}$$

Le quadrilatère ODFE a 4 côtés de même longueur, c'est un losange.

3) On donne les points P(-3 ; 2), Q(4 ; 3), R(6 ; -3) et S(-1 ; -4). Démontrez que PQRS est un parallélogramme dont on précisera les coordonnées du point d'intersection de ses diagonales.
coordonnées du milieu de [PR] : $\left(\frac{6-3}{2};\frac{-3+2}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$
coordonnées du milieu de [QS] : $\left(\frac{4-1}{2};\frac{3-4}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$
Les diagonales du quadrilatère PQRS se coupent en leur milieu donc PQRS est un parallélogramme.

Pourcentages

1. Pourcentages

- Calculer un pourcentage p d'une valeur c'est multiplier cette valeur par $\frac{p}{100}$
- Une augmentation de $p\%$ se traduit par une multiplication par $(1+\frac{p}{100})$
- Une diminution de $p\%$ se traduit par une multiplication par $(1-\frac{p}{100})$

Exercice 1.1 : Compléter les tableaux suivants

Pourcentage d'évolution	Coefficient multiplicateur
+5 %	1,05
-15 %	0,85
+45 %	1,45
-12 %	0,88
+12%	1,12
-16%	0,84
-51 %	0,49
+84%	1,84
+1,2 %	1,012
-0,5 %	0,995

Pourcentage d'évolution	Coefficient multiplicateur
+21 %	1,21
-24 %	0,76
-55%	0,45
-26%	0,74
+8%	1,08
+84%	1,84
-0,1 %	0,999
+2,12 %	1,0212
-31%	0,69
+10,2%	1,102

Exercice 1.2

1) Le prix d'un article coûtant 120 € a été augmenté de 10%. Combien coûte cet article ?

$$120\times\left(1+\frac{10}{100}\right)=120\times 1{,}10=132\text{ €}$$

2) Si on l'augmente une seconde fois de 10%, quel sera le prix de l'article ?

$$132\times 1{,}10=145{,}20\text{ €}$$

3) Quel serait le prix après une augmentation unique de 20% ?

$$120\times\left(1+\frac{20}{100}\right)=120\times 1{,}2=144\text{ €}$$

Exercice 1.3

1) Un particulier dispose d'une somme de 1200 €. Il augmente les trois-quarts de cette somme de 6% et diminue le reste de 8%.

Indiquer si le capital global a augmenté ou diminué, et de quel pourcentage.

$$\frac{3}{4}\times 1200\times 1{,}06+\frac{1}{4}\times 1200\times 0{,}92=1230$$

Le capital global a augmenté de 30 €.

$$\frac{1230 - 1200}{1200} = 0{,}025 = 25\%$$

Le capital global a augmenté de 25%

2) Le prix d'un article augmente de 25%, puis de 4%. Quel est le pourcentage global d'augmentation ?

$1{,}25 \times 0{,}96 = 1{,}20$ $\quad$ $1{,}20 \times 100 - 100 = +20\ \%$

3) Après une hausse de 5% un article coûte 420 €. Quel était son prix initial ?

$$420 \times \frac{1}{1{,}05} = 400\ €$$

4) Le prix d'un article passe de 500€ à 720€

a) Calculer le pourcentage d'augmentation.

$$\frac{720 - 500}{500} = 0{,}44 = +44\%$$

b) Quel pourcentage d'augmentation faudrait-il appliquer deux fois de suite à ce prix pour obtenir une augmentation globale de 44% ?

On a $CM_{moyen}^2 = 1{,}44$

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}20$ $\quad$ $1{,}20 \times 100 - 100 = +20\%$

VARIATIONS DE FONCTIONS

1. Définitions

f est dite **croissante** sur *I* lorsque :

pour tous nombres réels *a* et *b* de *I* tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.

f est dite **décroissante** sur *I* lorsque :

pour tous nombres réels *a* et *b* de *I* tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.

Le tableau de variation d'une fonction *f* sur son ensemble de définition est un tableau dans lequel figurent :

- l'ensemble de définition de f ;
- une flèche ou une succession de flèches indiquant si la fonction est strictement croissante, strictement décroissante et sur quel intervalle ;
- certaines images au bout des flèches lorsqu'on les connaît.

Exercice 1.1 : Lire un tableau de variation

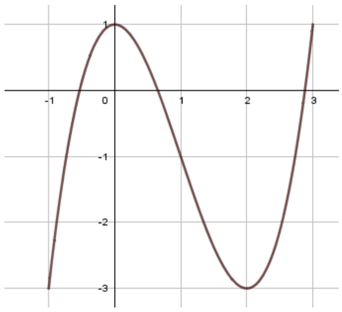
Des erreurs se sont glissées dans les tableaux de variations suivants. Les corriger.

x	-4		3 ~~5~~		5 ~~3~~
Variations de f	-1	↗	4	↘	2

x	-3		1		4		10
Variations de f	0	↗	+4	↘	-1	↗	5

Exercice 1.2 : Construire / exploiter un tableau de variation

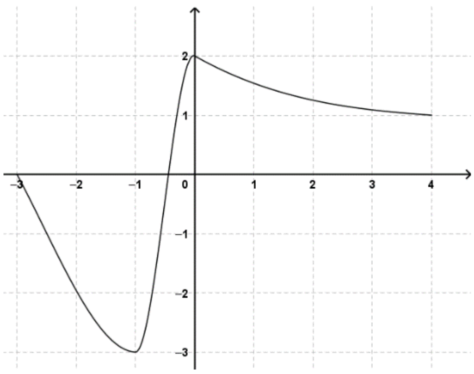
1. Avec la précision permise par le graphique, dresser le tableau de variation complet de la fonction h représentée graphiquement ci-contre sur son ensemble de définition.



x	-1		0		2		3
f	-3	↗	1	↘	-3	↗	1

2. Voici le tableau de variation d'une fonction g. Dessiner une courbe possible représentant cette fonction g.

x	-3		-1		0		4
Variations de g	0	↘	-3	↗	2	↘	1



Exercice 1.3 : Appliquer une définition

f est une fonction décroissante sur l'intervalle [-3 ; 5].
Arthur affirme que $(-2)<f(4)$. Qu'en pensez-vous ?

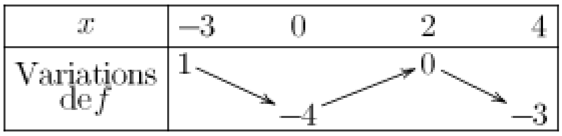
$-2 < 4$ et f est décroissante sur [-3 ;5] donc l'ordre est inversé.

$f(-2) > f(4)$

Arthur a faux.

Exercice 1.4 : Lire un tableau de variation

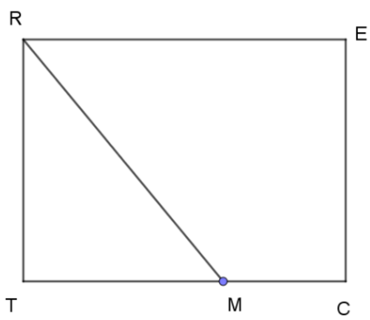
Par lecture du tableau de variation ci-dessous, répondre par vrai ou faux et corriger l'affirmation lorsque c'est faux.



1) L'image de -3 par f est 4. Faux : L'image de -3 par f est 1
2) La fonction f est décroissante sur [-3 ;0] Vrai.
3) Le minimum de f sur [-3 ;4] est -3. Faux : le minimum de f sur [-3 ;4] est -4.
4) Pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [0; 4], $f(x) \leq 0$. Vrai.
5) La fonction f est monotone sur [-3 ; 2]. Faux, la fonction f est décroissante sur [-3; 0] et croissante sur [0; 2]. (monotone = qui ne change pas de variations).
6) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Faux. Il existe une solution sur [-3 ; 0] (la courbe passe de 1 à -4 donc franchit 0) et $f(2) = 0$.
7) $f(-2) \geq f(-0{,}75)$ Vrai
8) $f(1) \leq f(2)$ Vrai

Exercice 1.5 : Problème de géométrie

RECT est un rectangle tel que *RE* = 8 cm et *EC* = 6 cm.
Un point *M* se déplace de *E* vers *T* sur les côtés [*EC*] et [*CT*] du rectangle.
La figure ci-dessous a été réalisée pour une position particulière de *M* sur son trajet.
(La figure n'est pas à l'échelle).



On note $\boldsymbol{x}$ la distance parcourue par le point *M* depuis le point de départ E.

On note $f(\boldsymbol{x})$ la distance *RM* lorsque le point *M* a parcouru une distance $\boldsymbol{x}$ depuis le point *E*.
On définit ainsi une fonction $\boldsymbol{f}$.

VERSION 1 (sans aide)
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

VERSION 2 (avec aide)
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? $x \in [0; 14]$
avec EC+CT=14
2. Que vaut $f(0)$?

$$f(0) = RE = 8$$

3. Calculer l'image par f de 6. Dans le triangle REC rectangle en E on a
$RC^2 = RE^2 + EC^2 = 64 + 36 = 100 \quad RC = 10 \quad f(6) = 10$

4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

x	0		6		14
f			10		
	8	↗		↘	6

PROBABILITES

2. Loi de probabilité

Définition : On considère une expérience aléatoire qui possède un nombre fini d'issues. Définir une loi de probabilité sur l'univers associé à cette expérience, c'est donner un tableau associant à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul et inférieur à 1 tel que la somme des $\boldsymbol{p_i}$ soit égale à 1. Ces p_i sont appelées les probabilités des issues ou encore probabilités élémentaires.

Exemple Dans le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, on peut proposer comme loi de probabilité :

Issues x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilités p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calcul de probabilités

Définition Une loi de probabilité étant définie sur un univers E, la probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

Remarque $P(\varnothing)=0$, $P(E)=1$ et $P(A)$ est compris entre 0 et 1.

$$P(A)=\frac{nombre\ d'issues\ qui\ réalisent\ A}{nombre\ d'issuespossibles}$$

Formules

Une loi de probabilité ayant été choisie sur un univers E, pour tous événements A et B, on a les égalités suivantes :

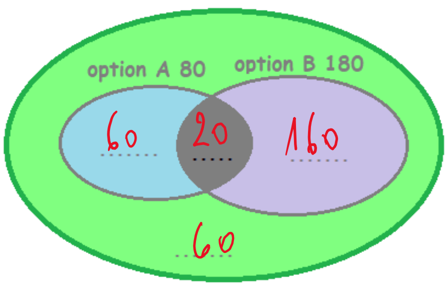
$$(\bar{A})=1-P(A)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Remarque

Si A et B sont incompatibles, cette dernière égalité devient $(A\cup B)=P(A)+P(B)$ car $P(A\cap B)=0$.

Exercice 2.1 : Avec un diagramme

Un lycée propose deux options facultatives à ses 300 élèves de seconde : l'option A et l'option B.
Chaque élève peut prendre une seule option, les deux options ou ni l'une ni l'autre.
80 élèves ont choisi l'option A, 180 ont choisi l'option B et 20 ont choisi les deux options.
On représente la situation à l'aide du diagramme ci-contre (appelé diagramme de Venn).



1. Déterminer les valeurs manquantes dans ce diagramme en indiquant ce qu'elles signifient.

60 élèves n'ont choisi que l'option A

160 élèves n'ont choisi que l'option B

20 élèves ont choisi les options A et B.

60 élèves n'ont choisi aucune option.

2. On choisit au hasard un élève de seconde.

a) Quelle est la probabilité pour que cet élève ait choisi l'option A ?

$$p(A)=\frac{80}{300}=\frac{4}{15}$$

b) Quelle est la probabilité pour que cet élève ait choisi les deux options ?

$$p(B) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

c) Quelle est la probabilité pour que cet élève ait choisi au moins une des deux options ?

$$p = \frac{60 + 20 + 160}{300} = \frac{4}{5}$$

3. Calculer P(A)+P(B). Retrouve-t-on le résultat de la question 2.c) ? Expliquer.

$$p(A) + p(B) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{1}{3}$$

On ne retrouve pas la même valeur car les événements A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice 2.2 : Avec un tableau

Un club sportif comporte 50 membres actifs dont 40% de femmes. Trois activités sont proposées à ses membres : cyclisme, natation et judo. Une seule activité est pratiquée par chaque personne du club. 10 hommes et 5 femmes pratiquent le cyclisme ; 8 femmes font de la natation et 12 hommes pratiquent le judo.

1. Quel calcul permet de déterminer le nombre de femmes dans ce club ?

$$50 \times \frac{40}{100} = 20$$

2. Compléter le tableau à double entrée suivant représentant la situation :

	Judo J	Natation N	Cyclisme C	Total
Homme *H*	12	8	10	30
Femme $\overline{H}$	7	8	5	20
Total	19	16	15	50

3. On choisit un membre au hasard dans l'ensemble du club.
Déterminer la probabilité des événement suivants : H, $\overline{H} \cap N$, $J \cup H$.

$$p(H) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

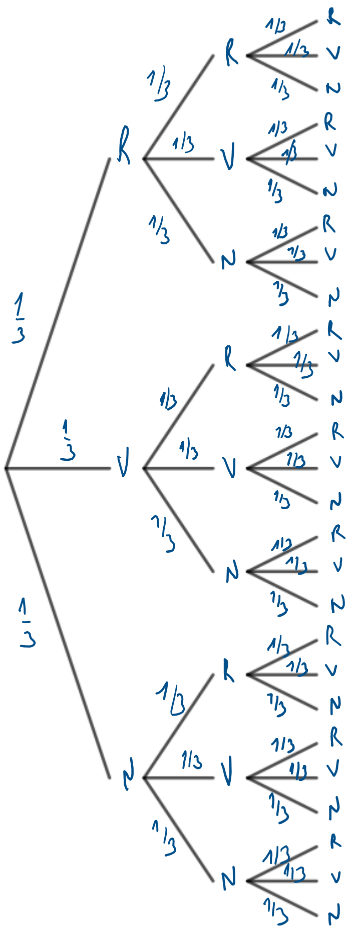
$$p(\overline{H} \cap N) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

$p(J \cup H) = \frac{7+12+8+10}{50} = \frac{37}{50}$ ou $p(J \cup H) = \frac{19+30-12}{50} = \frac{37}{50}$

Exercice 2.3 : Avec un arbre

On place trois lettres R, V et N dans un sac. On tire une première lettre qu'on écrit, on la remet dans le sac. On tire une seconde fois, on note la lettre obtenue qui est replacée dans le sac et on effectue de même un troisième tirage. On considère le mot de trois lettres ainsi formé.

1. Réaliser un arbre représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que le mot soit VNR .
3. Calculer la probabilité que le mot possède la lettre V en deuxième position.
4. Calculer la probabilité que le mot contienne la lettre R



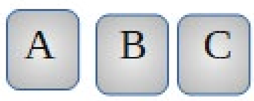
2. $P(V \cap N \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

3. $p = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

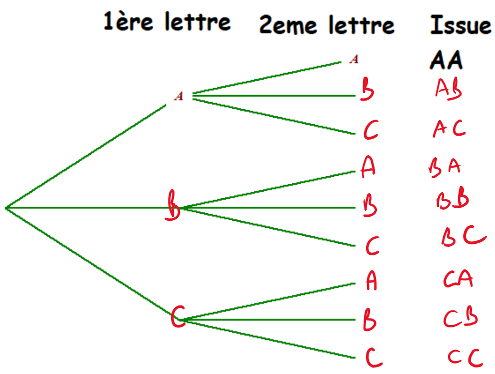
4. $p = \frac{19}{27}$

Exercice 2.4 : Le digicode

Le code d'entrée d'un garage à vélo est obtenu en appuyant deux fois sur le digicode ci-contre.



1. Reproduire et compléter l'arbre de dénombrement ci-contre.



2. On choisit un code au hasard.
Déterminer la probabilité des événements :
V : « Le code contient une même lettre répétée » ;
L : « Le code ne contient pas la lettre A »

$$p(V) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$p(L) = \frac{4}{9}$$